16. DEFINIČNÍ OBORY FUNKCÍ

16.1. Urči definiční obor funkce $f: y = \sqrt{7x^2 + 46x - 21}$.

ŘEŠENÍ:

$$7x^2 + 46x - 21 \geq 0$$

$$7x^2 + 46x - 21 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-46 \pm 52}{14} \Rightarrow x_1 = -7; x_2 = \frac{3}{7}$$

$$D(f) = (-\infty; -7\rangle \cup \langle \frac{3}{7}; \infty)$$

Funkce odmocnina je definována pro kladná reálná čísla a pro nulu.
Problematické bývají liché odmocniny. Některé učebnice i zde uvádějí definiční obor $\langle 0; \infty)$ jiné uvádějí u lichých odmocnin definiční obor celou množinu *R*.

16.2. Urči definiční obor funkce $f: y = \log \frac{4x - x^2 - 3}{16x^2 + 2}$.

ŘEŠENÍ:

$$\frac{4x - x^2 - 3}{16x^2 + 2} > 0$$

$16x^2 + 2 > 0$ to platí pro každé $x \in R$

$$4x - x^2 - 3 > 0$$

$$x^2 - 4x + 3 < 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = 3$$

$$D(f) = (1; 3)$$

Logaritmická funkce je definována pouze pro kladná reálná čísla.

Základ logaritmické funkce musí být ze sjednocení intervalů: $(0;1) \cup (1;\infty)$.

16.3. Urči definiční obor funkce $f: y = \frac{\pi}{\mathrm{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}$.

ŘEŠENÍ:

a) $x - \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$x \neq \frac{5\pi}{6} + k\pi$$

b) $\mathrm{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \neq 0$

$$x - \frac{\pi}{3} \neq k\pi$$

$$x \neq \frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$D(f) = R - \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{5\pi}{6} + k\pi \right\}$$

Funkce tangens je definována pro všechna reálná čísla různá od $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

Funkce kotangens je definována pro všechna reálná čísla různá od $k\pi$.

16.4. Urči definiční obor funkce $f: y = \log_{12}\sqrt{4^x - 16}$.

ŘEŠENÍ:

a) $4^x - 16 \geq 0$

$4^x \geq 16$

$4^x \geq 4^2$

$x \geq 2$

b) $\sqrt{4^x - 16} \neq 0$

$4^x - 16 \neq 0$

$4^x \neq 4^2$

$x \neq 2$

$D(f) = (2;\infty)$

Kombinace dvou podmínek.

Jedna podmínka vychází z odmocniny.
Druhá podmínka vychází z logaritmu.

16.5. Urči definiční obor funkce $f: y = \log(7 - |x+5| + |x-4|)$.

ŘEŠENÍ:

$7 - |x+5| + |x-4| > 0$

$x_{01} = -5$, $x_{02} = 4$

Výraz	$x \in (-\infty;-5)$	$x \in \langle -5;4)$	$x \in \langle 4;\infty)$
$x+5$	–	+	+
$x-4$	–	–	+

a) $x \in (-\infty;-5)$

$7 + x + 5 - x + 4 > 0 \Rightarrow 16 > 0 \Rightarrow D(f)_a = (-\infty;-5)$

b) $x \in \langle -5;4)$

$7 - x - 5 - x + 4 > 0 \Rightarrow 2x < 6 \Rightarrow x < 3 \Rightarrow D(f)_b = \langle -5;3)$

c) $x \in \langle 4;\infty)$

$7 - x - 5 + x - 4 > 0 \Rightarrow -2 > 0 \Rightarrow D(f)_c = \emptyset$

$D(f) = (-\infty;3)$

Z podmínky pro definování logaritmu dostaneme nerovnici s absolutními hodnotami.

16.6. Urči definiční obor funkce $f: y = \sqrt{x^2 - 9} + \log(7 - x)$.

ŘEŠENÍ:

a) $x^2 - 9 \geq 0$

$x^2 \geq 9$

$|x| \geq 3$

$x \in (-\infty;-3\rangle \cup \langle 3;\infty)$

b) $7 - x > 0$

$x < 7$

$x \in (-\infty;7)$

$D(f) = (-\infty;-3\rangle \cup \langle 3;7)$

Znovu kombinace dvou podmínek.

A znovu jedna podmínka vychází z odmocniny a druhá z logaritmu.

16.7. Urči definiční obor funkce $f : y = \sqrt{\dfrac{\log_{\frac{1}{2}}(1-x)}{x^2-4}}$.

ŘEŠENÍ:

a) $1-x>0$

$x<1$

$x\in(-\infty;1)$

b) $x^2-4\neq 0$

$x\neq \pm 2$

c) $\dfrac{\log_{\frac{1}{2}}(1-x)}{x^2-4}\geq 0$

Výraz	$x\in(-\infty;-2)$	$x\in(-2;0\rangle$	$x\in(0;1)$
$\log_{\frac{1}{2}}(1-x)$	–	–	+
x^2-4	+	–	–

$D(f)=(-2;0\rangle$

Tentokrát kombinujeme dokonce tři podmínky.

Nejobtížnější je vyřešit podmínku pro odmocninu, která vede k nerovnici zlomku s logaritmem v čitateli.

Promysli si řešení s tabulkou.

Intervaly do tabulky uvádíme jen v rozmezí definičního oboru samotného logaritmu.

Hraniční (nulový) bod $x=-2$ do řešení v c) nezahrnujeme, neboť odporuje definičnímu oboru podílu.

Další příklady (již jen pouhé řešení bez vysvětlujících poznámek)

16.8. Urči definiční obor funkce $f: y=\sqrt{\dfrac{x-11}{x+17}}$.

$$\frac{x-11}{x+17}\geq 0,\ x\neq -17$$

		-17		11	
$x-11$	$-$		$-$		$+$
$x+17$	$-$		$+$		$+$
	$+$		$-$		$+$

$$D(f)=(-\infty,-17)\cup\langle 11;\infty)$$

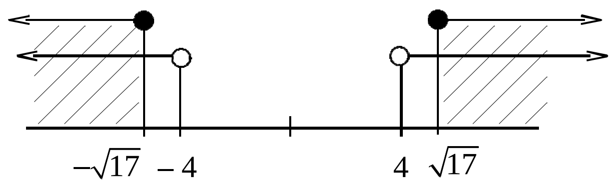
16.9. Urči definiční obor funkce $f: y=\sqrt{\log\left(x^2-16\right)}$.

a)

$$\log\left(x^2-16\right)\geq 0$$
$$\log\left(x^2-16\right)\geq \log 1$$
$$x^2-16\geq 1$$
$$x^2\geq 17$$
$$|x|\geq\sqrt{17}$$

b)

$$x^2-16>0$$
$$x^2>16$$
$$|x|>4$$



$$D(f)=\left(-\infty,-\sqrt{17}\right\rangle\cup\langle 17,\infty)$$

16.10. Urči definiční obor funkce $f: y=\sqrt{1-\log_{\frac{1}{10}}\left|\frac{x}{x-3}\right|}$.

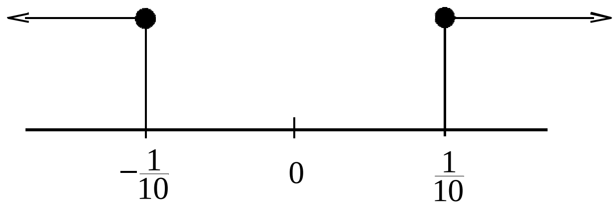
a)

$$1-\log_{\frac{1}{10}}\left|\frac{x}{x-3}\right|\geq 0$$

$$\log_{\frac{1}{10}}\left|\frac{x}{x-3}\right|\leq \log_{\frac{1}{10}}\frac{1}{10}$$

$$\left|\frac{x}{x-3}\right|\geq\frac{1}{10}$$

$$|y|\geq\frac{1}{10}$$



$$\frac{x}{x-3}\leq-\frac{1}{10}$$

$$\frac{x}{x-3}+\frac{1}{10}\leq 0$$

$$\frac{10x+x-3}{10(x-3)}\leq 0$$

$$\frac{11x-3}{10(x-3)}\leq 0$$

		$\frac{3}{11}$		3	
$11x-3$	−		+		+
$x-3$	−		−		+

$$x\in\left\langle\frac{3}{11};3\right)$$

$$\frac{x}{x-3}\geq\frac{1}{10}$$

$$\frac{x}{x-3}-\frac{1}{10}\geq 0$$

$$\frac{10x-x+3}{10(x-3)}\geq 0$$

$$\frac{9x+3}{10(x-3)}\leq 0$$

		$-\frac{1}{3}$		3	
$9x+3$	−		+		+
$x-3$	−		−		+

$$x\in\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right\rangle\cup(3;\infty)$$

$$D(f)=\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right\rangle\cup(3;\infty)$$

b)

$$\frac{x}{x-3}\neq 0$$

$$x\neq 0$$

c)

$$x\neq 3$$

16.11. Urči definiční obor funkce $f: y = \dfrac{1 + \mathrm{tg}\left(6x - \dfrac{\pi}{6}\right)}{1 - \mathrm{cotg}^2 x}$.

a)

$$6x - \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$
$$6x \neq \frac{4}{6}\pi + k\pi$$
$$x \neq \frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{6}$$

b)

$$x \neq k\pi$$

c)

$$1 - \mathrm{cotg}^2 x \neq 0$$
$$\mathrm{cotg}^2 x \neq 1$$
$$\mathrm{cotg}\, x \neq \pm 1$$
$$x \neq \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$D(f) = R - \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{6}; k\pi; k \cdot \frac{\pi}{2} \right\}$$

16. TEORETICKÁ ČÁST

Otázky, které mohou padnout při maturitní zkoušce:

1) **Vysvětli pojmy definiční obor a obor hodnot funkce.**
2) **Jaký je definiční obor funkce $f: y=\sqrt{x}$?**
3) **Jaký je definiční obor funkce $f: y=\sqrt[3]{x}$?**
4) **Jaký je definiční obor funkcí tangens a kotangens?**
5) **Jaký je definiční obor logaritmické funkce?**

1. Vysvětli pojmy definiční obor a obor hodnot funkce.

Funkci chápeme jako jisté přiřazení. Podle přesně určeného předpisu jednoznačně přiřazujeme reálným číslům jedné množiny (například množiny *A*) reálná čísla jiné množiny (například množiny *B*). Definičním oborem nazýváme tu množinu, jejímž prvkům je předpisem přiřazováno (v našem případě se jedná o množinu *A*), oborem hodnot nazýváme tu množinu, jejíž prvky jsou předpisem přiřazovány (v našem případě se jedná o množinu *B*).
Definiční obor značíme D(*f*), obor hodnot značíme H(*f*).
Zjednodušené vysvětlení: definiční obor se skládá ze všech přípustných reálných čísel, která můžeme do předpisu funkce za *x* dosazovat, obor hodnot jsou všechna reálná čísla, která po dosazení vyjdou jako hodnoty *y*.

2. Jaký je definiční obor funkce $f: y=\sqrt{x}$?

Definiční obor sestavujeme ze všech přípustných hodnot, které lze do předpisu funkce dosadit. Velmi často vytváříme definiční obor zužováním množiny R, popřípadě odečítáním od množiny R nepřípustných hodnot pro danou funkci nebo přímo množin nepřípustných hodnot. V případě funkce druhé odmocniny nelze určit odmocninu z jakéhokoli záporného čísla. Množinu, která odpovídá definičnímu oboru, tvoří všechna kladná čísla a nula:
Definiční obor funkce $f: y=\sqrt{x}$: $D(f)=\langle 0;\infty)$

3. Jaký je definiční obor funkce $f: y=\sqrt[3]{x}$?

Podle většiny středoškolských učebnic jsou všechny odmocniny, bez ohledu na to, je-li odmocnitel sudý nebo lichý, definovány podobně jako druhá odmocnina jen na množině nezáporných reálných čísel. Některé novější matematické publikace povolují definovat odmocniny s lichým odmocnitelem na množině všech reálných čísel.
Definiční obor funkce (podle většiny učebnic) $f: y=\sqrt[3]{x}$: $D(f)=\langle 0;\infty)$
Definiční obor funkce (podle některých publikací) $f: y=\sqrt[3]{x}$: $D(f)=\mathrm{R}$

4. Jaký je definiční obor funkcí tangens a kotangens?

Definiční obor funkce $y = \mathrm{tg}\, x$: $D(f)=\mathrm{R}-\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$

Definiční obor funkce $y = \mathrm{cotg}\, x$: $D(f)=\mathrm{R}-\bigcup_{k\in Z}\{k\pi\}$

5. Jaký je definiční obor logaritmické funkce?

V případě logaritmické funkce nelze určit hodnotu logaritmu žádného záporného čísla ani čísla nula. Množinu, která odpovídá definičnímu oboru, tvoří všechna kladná čísla:

Definiční obor funkce $f : y = \log_a x$: $D(f) = (0;\infty)$